

文章编号:1000-8055(2021)11-2400-10

doi:10.13224/j.cnki.jasp.20200522

小样本无失效寿命试验数据的轴承 可靠性评估

王瑞祥¹, 许凌天¹, 陈晓阳¹, 王 鹏², 陈世金¹

(1. 上海大学 机电工程与自动化学院, 上海 200444;

2. 中国人民解放军 陆军装备部驻上海地区航空军事代表室, 上海 200233)

摘 要: 针对小样本无失效寿命试验数据可靠性问题提出了评估模型。模型采用 Bayes 理论构造服从原始样本的抽样函数, 结合 Bootstrap 法生成大量服从抽样函数的随机数作为增广样本, 再通过最佳线性不变估计法分析原始样本及增广样本得到 Weibull 分布双参数估计值作为可靠性评估结果。通过 Monte-Carlo 法仿真生成服从 Weibull 分布的随机数, 分别采用该模型、配分布曲线法及现有 Bayes 理论对此随机数做评估, 对比发现: 该模型得到的参数估计较现有 Bayes 理论和配分布曲线法更接近 Weibull 双参数真值, 且形状参数和尺度参数估计值的相对误差均低于 10%, 验证了模型分析小样本无失效数据进行可靠性评估的可行性。借助文献实例对模型进行分析, 对比得出模型能得到较现有 Bayes 理论和配分布曲线法更符合工程实际的评估结果; 模型在小样本情况下的双侧可靠度置信区间长度低于现有 Bayes 理论和配分布曲线法, 有效提高了小样本无失效数据可靠性评估精度。

关 键 词: 小样本无失效; 可靠性评估; Bayes 理论; Bootstrap 法; 置信区间

中图分类号: V241; TH133.33

文献标志码: A

Reliability evaluation of bearings based on small samples and zero-failure life test data

WANG Ruixiang¹, XU Lingtian¹, CHEN Xiaoyang¹,
WANG Peng², CHEN Shijin¹

(1. School of Mechatronic Engineering and Automation,
Shanghai University, Shanghai 200444, China;

2. Shanghai Aviation Military Representative Office of
the Army Equipment Department, People's Liberation Army, Shanghai 200233, China)

Abstract: A reliability evaluation model of small samples and zero-failure life data was proposed. The Bayes theory was used to construct a sampling function subjecting to the original small samples. The Bootstrap method was used to generate a large of random numbers subjecting to the sampling function as augmented samples. Both of the original and augmented samples were analyzed by the best linear invariant estimation method to obtain the two-parameter estimation value of Weibull distribution for reliability evaluation. The Monte-Carlo method was used to generate random numbers subjecting to the Weibull distribution. These random numbers were evaluat-

收稿日期:2020-12-07

基金项目:国家“十二五”基础科研项目上海大学子项(D. 50-0109-15-001)

作者简介:王瑞祥(1994-),男,硕士生,主要研究方向为小样本无失效轴承可靠性评估。

引用格式:王瑞祥,许凌天,陈晓阳,等. 小样本无失效寿命试验数据的轴承可靠性评估[J]. 航空动力学报,2021,36(11):2400-2409.

WANG Ruixiang, XU Lingtian, CHEN Xiaoyang, et al. Reliability evaluation of bearings based on small samples and zero-failure life test data[J]. Journal of Aerospace Power, 2021, 36(11): 2400-2409.

ed by the model, the match distribution curve method and the existing Bayes theory respectively. The results showed that the parameter estimates obtained by the model were closer to the Weibull two-parameter true value than the existing Bayes theory and the match distribution curve method. Meanwhile, the relative error of the estimated value of the shape parameter and the scale parameter was less than 10%, indicating the feasibility of the model to analyze the small sample of zero-failure data for reliability evaluation. The model was verified with examples in reference, and the results showed that the reliability evaluation obtained by the model was closer to that used in actual engineering practice than the other two methods; moreover the model's two-sided reliability confidence interval length was smaller than the other two methods, effectively improving the accuracy of reliability evaluation of small samples and zero-failure data.

Key words: small samples and zero-failure; reliability evaluation; Bayes theory; Bootstrap method; confidence interval

随着制造工艺技术的不断提高和高新材料的发明和应用,仪表轴承产品的可靠性也得到了大幅度提高,通过此类长寿命产品可靠性试验获得具有高可靠性的失效数据不仅要耗费大量的经济成本,同时也要经历漫长的试验周期。例如航天航空产品中的仪表轴承不仅制造材料费用昂贵,生产批量极小,其可靠性试验常常在进行数万小时甚至更长的时间仍没有失效发生,故要得到失效寿命数据需要花费大量的时间与经济成本,如要对这类产品进行较大样本的寿命试验很不现实。当出现这种情况时难以对产品进行完全失效试验,同时也很难采用大量的产品样本进行试验,所以想要通过可靠性试验获得产品的寿命时,往往使用小样本的定数截尾试验或者定时截尾试验。在工程实践中,一般认为样本量小于 30 为小样本^[1],此情况下只能根据这些小样本无失效数据进行可靠性分析。所以,小样本无失效数据条件下的可靠性寿命分析一直是可靠性研究中的热点。

国外最早对无失效数据展开了研究, Martz 与 Waller^[2]假设产品寿命服从指数分布,提出了 BAZE (Bayesian zero-failure) 方法,它是以 Bayes 方法为基础的无失效可靠性控制检验方法,该方法利用 Bayes 思想解决了指数分布下产品的可靠性评价。Erto 和 Giorgio^[3]在 Weibull 分布的两个参数都未知的情况下,提出了二参数“实用 Bayes 估计”的 Weibull 模型,并结合 Monte-carlo 仿真法验证了模型的可行性。Kwon^[4-5]基于 Bayes 方法,分别针对轴承服从 Weibull 分布和对数正态分布的产品,提出了无失效样本的可靠性验证方法。国内相对国外较晚开始无失效数据分析,但国内

也做了大量工作。韩明^[6-7]基于 Bayes 理论分析方法的条件下提出了无失效数据的 E-Bayes 分析方法,从而使无失效数据的分析得到深入研究;又给出了状态概率的多层 Bayes 估计、状态概率的 E-Bayes 估计的性质,即 E-Bayes 估计和多层 Bayes 估计的关系。傅惠民和张勇波^[8]提出了一种 Weibull 分布定时无失效数据可靠性分析方法,在形状参数下限已知的情况下,给出了可靠度和使用寿命的单侧置信下限。李海洋等^[9]和 Li 等^[10]利用 E-Bayes 方法得到各个截尾时间处的产品失效概率估计,再利用配分布曲线方法得到产品的寿命概率分布曲线,引入参数 Bootstrap 法从寿命概率分布中重新抽取新样本,通过新样本获得产品可靠度的点估计和区间估计。Yin 和 Huang 等^[11]引入了指数分布的 E-Bayes 法,提出了无失效分析模型。利用所建立的模型运用 E-Bayes 法估计电子元件的失效概率和可靠性,并验证了该方法的有效性。

在无失效数据分析中,大多都是关于大样本量数据的分析,而在样本量越小时,模型的评估精度越低,难以达到评估要求。茆诗松等^[12]以二层 Beta 分布作为失效率的先验分布,利用 Bayes 方法首先得出各个截尾时间点的失效率点估计,然后通过加权最小二乘法得出 Weibull 分布的形状参数和特征寿命,从而对轴承的可靠性进行验证。肖支才等^[13]将 Bootstrap 方法应用于小样本数据的均值估计,并验证了方法的有效性。贾祥等^[14]针对小样本数据,采用配分布曲线方法计算得出了 Weibull 双参数的点估计和区间估计,并通过实际算例验证了方法的有效性。Li 等^[15]提出了一种基于 Bootstrap 法的数据模拟方法,通过选择双参

数 Weibull 分布的最大参数值,增强对产品寿命分布的非线性和不对称形状的估计,能够在小样本数据的情况下对产品的寿命进行评估。丛伟等^[16]基于定时截尾下的 Weibull 分布参数的矩估计法提出了中值无偏矩估计法,对小样本下的评估结果进行了修偏处理,针对小样本下服从 Weibull 分布的产品再定时截尾试验方案下的寿命分布参数估计问题,给出了样本量为 2~12 的中值 a 、 b 无偏修正系数。高攀东等^[17]将 Bootstrap 法与中值无偏矩估计法相结合,并应用于小样本下 Weibull 分布的参数估计,通过 Monte-Carlo 模拟验证了所提方法的评估结果误差较小,结果稳健。

综上所述,现在研究中常用基于寿命数据的参数估计模型种类繁多,分别针对小样本及无失效数据可靠性评估问题的研究也不少,但是很少有学者将小样本无失效条件一并考虑计算可靠性。本文针对小样本无失效寿命数据提出一种将 Bayes 理论、Bootstrap 法、最佳线性不变估计法(Bule 法)相结合的评估模型,并通过 Monte-Carlo 模拟法和文献实例对模型的可行性及有效性进行了论证。

1 小样本无失效分析模型

1.1 轴承寿命分布类型

可靠性试验能够直接得到轴承的疲劳寿命,基于寿命试验数据去评估轴承的可靠性,首先要明确轴承疲劳寿命的分布类型。对滚动轴承疲劳寿命分布类型的选取早已有相关的标准,国家标准 GB/T 24607-2009 推荐使用 Weibull 分布作为滚动轴承的疲劳寿命分布类型。经过大量的实践证明,凡是因某一局部失效而导致全局停止运行的元件、器件、设备等的寿命都可看作或近似看作服从 Weibull 分布,如金属材料 and 机械零部件的疲劳寿命就服从 Weibull 分布^[18]。Weibull 分布是一种连续的概率分布模型,二参数和三参数是它的基本形式,本文以二参数的 Weibull 分布作为轴承的寿命分布形式,探讨轴承的可靠性评定相关内容。

若轴承的寿命服从 Weibull 分布,则在任意时刻 t ,该产品的失效概率密度函数为

$$f(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] \quad (1)$$

则产品的失效概率分布函数为

$$F(t) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] \quad (2)$$

轴承的寿命可靠度就可以表示为

$$R(t) = 1 - F(t) = \exp\left[-\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}\right] \quad (3)$$

其中 β 为形状参数, η 为尺度参数。

1.2 无失效数据的定义

可靠性分析理论中关于无失效数据的定义有准确的行业标准。在可靠性试验中,设某一机械产品共 n 个样本分 k 组进行定时截尾试验,截尾时间从小到大为 $T_1, T_2, \dots, T_k (T_1 < T_2 < \dots < T_k)$, 每组的试验样本数记为 $n_1, n_2, \dots, n_k$, 若所有产品无一失效,则称 $(T_i, n_i) (i=1, 2, \dots, k)$ 为无失效数据。无失效数据的结构如表 1 所示。

表 1 无失效数据结构

Table 1 Structure of zero-failure data

分组序号 i	截尾时间 T_i	第 i 组样本数 n_i	未失效数 s_i
1	T_1	n_1	s_1
2	T_2	n_2	s_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	T_k	n_k	s_k

表 1 中未失效数 s_i 为该试验进行到 T_i 时间时的剩余未失数, $s_i = n_k + n_{k-1} + \dots + n_i$ 。例如: 试验进行到 T_2 时刻时所有样本均未发生失效,而此时第一组样本已经截尾,则此时试验未发生失效的样本数为总试验样本数 n 减去 T_1 时刻截尾的样本数 n_1 , $s_2 = n - n_1 = n_k + n_{k-1} + \dots + n_2$ 。

1.3 失效概率估计

记在任意时刻 t 处失效概率为 p_i , 先验分布应取 Beta 分布,考虑到 p_i 的性质: p_i 值很大的概率很小,而 p_i 值很小的概率很大,而 Beta 分布能很好地描述这一性质。因此失效概率 p_i 的先验密度函数为

$$\pi(p_i|a, b) = \frac{1}{B(a, b)} p_i^{a-1} (1-p_i)^{b-1} \quad (4)$$

式中 a, b 为超参数, Beta 函数为

$$B(a, b) = \int_0^1 t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt \quad (5)$$

根据 Bayes 假设和 Beta 分布的性质,考虑到 Bayes 估计的稳健性问题^[19],一般取超参数 a 和 b 的分布为均匀分布

$$\pi_1(a)=1, \pi_2(b)=\frac{1}{c-1}, \quad 1 < b < c \quad (6)$$

式中 c 是常数, 且不宜太大, c 在 $[2, 6]$ 中选取较适宜^[20]。但在工程应用中, c 通常取 5, 工程实际应用中常取 $a=1$ 。

由以上分析, 当 a, b 按式 (6) 取均匀分布时, 失效概率 p_i 的先验密度函数变为

$$\pi(p_i|b) = b(1-p_i)^{b-1}, \quad 0 < p_i < 1 \quad (7)$$

1) 多层 Bayes 法

在平方损失下, p_i 的多层 Bayes 估计的计算式为^[6]

$$\hat{p}_{\text{hB}} = \frac{(s_i+1)\ln\left(\frac{s_i+c+1}{s_i+2}\right) - s_i\ln\left(\frac{s_i+c}{s_i+1}\right)}{c-1-s_i\ln\left(\frac{s_i+c}{s_i+1}\right)} \quad (8)$$

2) E-Bayes 法

在平方损失下, p_i 的 E-Bayes 估计的计算式为^[7]

$$\hat{p}_{\text{EB}} = \frac{1}{c-1} \int_1^c \frac{1}{s_i+b+1} db = \frac{1}{c-1} \ln\left(\frac{s_i+c+1}{s_i+2}\right) \quad (9)$$

1.4 模型的建立

1) 多层 Bayes 法构造原始样本的分布函数

根据上文叙述的多层 Bayes 法定义和 Bayes 定理, 在平方损失下可得到 p_i 的多层 Bayes 估计为式 (8) 所示, 超参数 c 取值为工程建议值 5。

得到各个时刻点的失效概率点 $\hat{p}_{\text{hB}}$ 估计值后, 就可根据加权最小二乘估计法, 提出 Weibull 双参数估计值 $\hat{\beta}, \hat{\eta}$ 为

$$\begin{aligned} \hat{\beta} &= \frac{1}{\hat{\sigma}} \\ \hat{\eta} &= \exp \hat{\mu} \end{aligned} \quad (10)$$

式中

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= \frac{D-AC}{B-A^2}, \quad \hat{\mu} = \frac{BC-AD}{B-A^2} \\ A &= \sum_{i=1}^k \omega_i x_i, \quad B = \sum_{i=1}^k \omega_i x_i^2 \\ C &= \sum_{i=1}^k \omega_i y_i, \quad D = \sum_{i=1}^k \omega_i x_i y_i \\ x_i &= \ln \ln \left(\frac{1}{1-\hat{p}_{\text{hB}}} \right), \quad y_i = \ln T_i \end{aligned} \quad (11)$$

式中 ω_i 为权重值, $\omega_i = n_i T_i / \sum_{i=1}^k n_i T_i$ 。 T_i 为第 i 组

的截尾时间, k 为试验分组数, n_i 为第 i 组样本数。

将得到的式 (10) 中的 Weibull 参数点估计值代入式 (3) 便可得到原始样本服从 Weibull 抽样函数的可靠度 $\hat{R}(t)$ 。

$$\hat{R}(t) = \exp \left[- \left(\frac{t}{\hat{\eta}} \right)^{\hat{\beta}} \right] \quad (12)$$

2) 仿真生成自助样本

根据构造的抽样函数运用 Bootstrap 法生成服从抽样函数的随机数 (随机数的个数要远大于原始样本数 n)。对产生的数据从小到大进行排列后均匀分为 d 组, 取后 n 组数据, 对每一组数据选出该组中最大的数据作为本组无失效寿命上限值。轴承的额定寿命值是可靠度为 0.9 的轴承寿命值, 而轴承的制造精度、装配环境、使用过程、载荷分布等很多因素造成其实际寿命往往低于基本额定寿命, 故建议均分组数 d 的值要大于生成的随机数个数的 $1/10$, 使得到的无失效寿命上限值落在所有随机数从小到大排列的后 10% 区间内, 那么可近似认为该时间这组产品将发生失效, 得到伪失效寿命数据样本 $T^* = \{t_1^*, t_2^*, t_3^*, \dots\}$, 其中 t_j^* 为仿真中第 j 个样品伪失效时间。由于失效样本和无失效样本的估计方法不同, 对于极小样本和小样本完全失效数据文献 [21] 给出建议用最佳线性不变估计法估计参数。国家标准 GB/T 24607-2009 给出了根据试验数据计算形状参数 β_j 和尺度参数 η_j 的公式, 如式 (13) 所示。

$$\begin{aligned} \beta_j &= \frac{1}{\sum_{j=1}^r C_l(n, r, j) \ln L_j} \\ \ln \eta_j &= \sum_{j=1}^r D_l(n, r, j) \ln L_j \end{aligned} \quad (13)$$

式中 $C_l(n, r, j)$ 和 $D_l(n, r, j)$ 为最佳线性不变估计系数, 可以通过查阅《可靠性试验用表》得到。 r 为失效数, L_j 为第 j 个的寿命时间, 当 $r=n$ 即为完全样本数据。

根据式 (13) 得到形状参数 β_j 和尺度参数 η_j 的估计值后, 可以计算给定任务下 t_j 的可靠度 $R(t_j)$ 。

3) 重复步骤 2) B 次, 可以得到 B 组 $\beta_j, \eta_j, R(t_j)$ 的估计值, 利用这些估计值拟合 Weibull 分布参数 β, η 的先验概率密度, 本文取 $B=10\,000$ 。概率密度类型可以通过这 B 组 β, η 的分布特性来取, 本文假设其服从正态分布且两个参数之间是相互独立的。

β, η 的联合先验概率密度可以表示为

$$\pi(\beta, \eta) = \pi(\beta)\pi(\eta) \quad (14)$$

假设某一产品的试验样本无失效寿命时间为 $t_1, t_2, \dots, t_n$, 该产品的试验寿命值服从 Weibull 分布, 可以将其在给定参数 β, η 条件下的极大似然估计表达式写出来。对于寿命服从 Weibull 分布的受试件, 在非截尾情形下, 取各个寿命值上概率密度函数的乘积作为样本的似然函数; 在截尾情形下, 在各个截尾样本上用 $1 - F(t) = \exp[-(t/\eta)^\beta]$ 代替概率密度函数与失效样本所对应的概率密度函数值相乘, 求出似然函数。故对定时(定数)截尾试验寿命数据的极大似然函数可以表示为式(15)的形式。

$$L(\beta, \eta) = \frac{n!}{(n-r)!} \prod_{i=1}^r \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t_i}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{t_i}{\eta}\right)^\beta\right] \cdot \left[\exp-\left(\frac{t_r}{\eta}\right)^\beta\right]^{n-r} \quad (15)$$

假设投入 n 个样本进行试验到 r 个失效时停止, 观测到的失效时间的顺序统计为 $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_r$, 因为本文研究的是无失效问题, 则 $r=0$ 。式(15)就改写成

$$L(\beta, \eta) = \prod_{i=1}^n R'(t_i, \beta, \eta) \quad (16)$$

式中 $R(t, \beta, \eta)$ 为产品的可靠度函数。

在给定参数条件 β, η 下无失效寿命为 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 的概率为

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n | \beta, \eta) = \prod_{i=1}^n R'(t_i, \beta, \eta) \quad (17)$$

所以关于样本和参数估计值的联合分布为

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n, \beta, \eta) = \pi(\beta, \eta) \prod_{i=1}^n R'(t_i, \beta, \eta) \quad (18)$$

可以将样本和参数估计值的联合分布做如下分解:

$$f(t_1, t_2, \dots, t_n, \beta, \eta) = f(\beta, \eta | t_1, t_2, \dots, t_n) g(t) \quad (19)$$

式中 $g(t)$ 是原始样本的边缘函数, 即

$$g(t) = \iint_{\Theta_n} f(t_1, t_2, \dots, t_n, \beta, \eta) d\beta d\eta = \iint_{\Theta_n} \pi(\beta, \eta) \prod_{i=1}^n R'(t_i, \beta, \eta) d\beta d\eta \quad (20)$$

式中 Θ_n 表示 β, η 的取值范围, 可以通过 Bootstrap 法生成模拟样本的 90% 置信水平下的双侧置信区间求得。

所求的 Weibull 分布参数的后验概率密度为

$$f(\beta, \eta | t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{f(\beta, \eta, t_1, t_2, \dots, t_n)}{g(t)} \quad (21)$$

根据上述推导, 可以将后验概率密度进一步改写为

$$f(\beta, \eta | t_1, t_2, \dots, t_n) = \frac{\pi(\beta, \eta) \prod_{i=1}^n R'(t_i, \beta, \eta)}{\iint_{\Theta_n} \pi(\beta, \eta) R'(t_i, \beta, \eta) d\beta d\eta} \quad (22)$$

由式(22)可以得出 Weibull 分布参数 β, η 的后验概率密度分别为

$$\pi_1(\beta) = \frac{\int_{\Theta_1} \pi(\beta, \eta) \prod_{i=1}^n R'(t_i, \beta, \eta) d\eta}{\iint_{\Theta_n} \pi(\beta, \eta) \prod_{i=1}^n R'(t_i, \beta, \eta) d\beta d\eta} \quad (23)$$

$$\pi_1(\eta) = \frac{\int_{\Theta_2} \pi(\beta, \eta) \prod_{i=1}^n R'(t_i, \beta, \eta) d\beta}{\iint_{\Theta_n} \pi(\beta, \eta) \prod_{i=1}^n R'(t_i, \beta, \eta) d\beta d\eta} \quad (24)$$

式中 Θ_1 表示 η 的取值范围, Θ_2 表示 β 的取值范围。

式(23)、式(24)的积分不容易求解, 因此根据文献[22], 式(23)、式(24)可改写为

$$E(\beta) = \frac{\iint_{\Theta_n} \beta \pi(\beta, \eta) \prod_{i=1}^n R'(t_i, \beta, \eta) d\beta d\eta}{\iint_{\Theta_n} \pi(\beta, \eta) \prod_{i=1}^n R'(t_i, \beta, \eta) d\beta d\eta} \quad (25)$$

$$E(\eta) = \frac{\iint_{\Theta_n} \eta \pi(\beta, \eta) \prod_{i=1}^n R'(t_i, \beta, \eta) d\beta d\eta}{\iint_{\Theta_n} \pi(\beta, \eta) \prod_{i=1}^n R'(t_i, \beta, \eta) d\beta d\eta} \quad (26)$$

可以用计算机软件对式(25)、式(26)做有限范围内的数值积分, 求出 β 和 η 的后验期望值 $E(\beta)$ 和 $E(\eta)$, 将其与由原始样本生成的抽样函数双参数 $\hat{\beta}$ 和 $\hat{\eta}$ 的均值作为本文模型最终得到的 Weibull 分布参数估计值。

$$\tilde{\beta} = \frac{\hat{\beta} + E(\beta)}{2} \quad (27)$$

$$\tilde{\eta} = \frac{\hat{\eta} + E(\eta)}{2} \quad (28)$$

式中 $\tilde{\beta}$ 为本文模型最终得到的 Weibull 分布 β 估计值, $\hat{\beta}$ 为抽样函数的 β 估计值, $E(\beta)$ 为 Bayes 法得到的后验参数 β 的期望值, $\tilde{\eta}$ 为本文模型最终得到

的 Weibull 分布 η 估计值, $\hat{\eta}$ 为抽样函数的 η 估计值, $E(\eta)$ 为 Bayes 法得到的后验参数 η 的期望值。

将估计值 $\tilde{\beta}$ 和 $\tilde{\eta}$ 代入式 (3) 便可以得到产品可靠度曲线, 求出任意时间产品的可靠度, 从而对产品的可靠性进行评估。

分析小样本无失效寿命数据可靠性评估方法流程图如图 1 所示, 图中 T 表示截尾时间, n 表示样本数, s 表示未发生失效的样本数, m 表示循环次数。

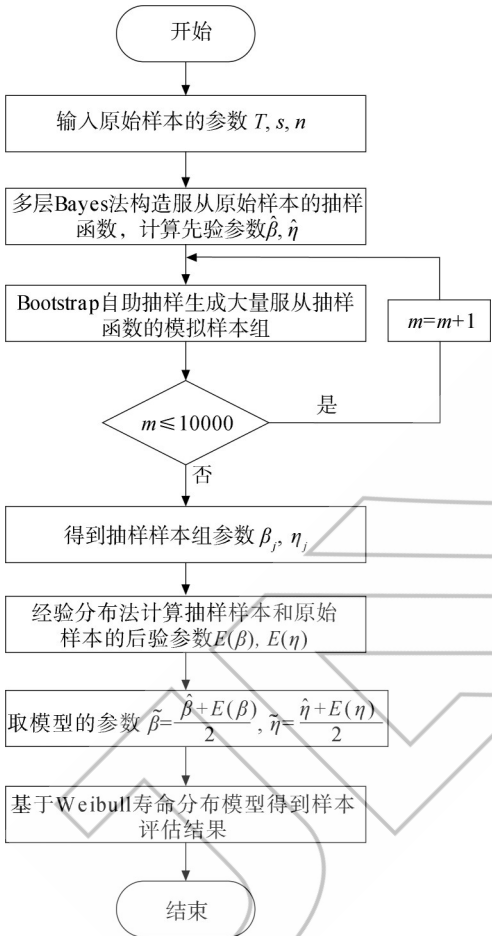


图 1 小样本无失效寿命数据可靠性评估流程图
Fig.1 Flow chart of reliability evaluation of small sample zero-failure life data

1.5 Monte-Carlo 模拟验证

根据文献[23]的做法, 运用 Monte-Carlo 法产生服从 Weibull 分布的 600 个随机数 (远大于无失效数据样本量) 按照从小到大进行排列, 然后以 10 个数据为一组进行分组并取前 6 组数据, 对每一组数据选取该组数据中最小的数据, 然后对该组数据最小的数据进行向下取整所得到的值作为该组的截尾时间 T_i , 可认为该时间段内这组产品

都没有发生失效, 每个截尾时间点的样本数为 n_i , 依次递减, 每个截尾时间点尚未发生失效的样本总数为 s_i 。产生 Weibull 随机数的真值参数为 $\beta=2, \eta=2\,000$ 。本文取试验总样本数为 21 个, 得到一组无失效小样本数据如表 2 所示。

表 2 Monte-Carlo 仿真得到的数据

Table 2 Monte-Carlo simulation data			
分组序号 i	截尾时间 T_i	第 i 组样本数 n_i	未失效数 s_i
1	36	6	21
2	271	5	15
3	313	4	10
4	364	3	6
5	435	2	3
6	467	1	1

分别用 E-Bayes 法、多层 Bayes 法、配分布曲线法和本文模型对表 2 无失效数据计算, 得到的 Weibull 参数估计值与 Monte-Carlo 法得出的 Weibull 参数真值进行对比, 结果如表 3 所示, 表中 $E_{mr,\beta}$ 表示形状参数与真值的误差, $E_{mr,\eta}$ 表示尺度参数与真值的误差。其中, 关于配分布曲线法的计算, 文献[14]中有详细的论述, 这里不再赘述, 本文采用文献[14]的模型进行配分布曲线法双参数值的计算。

相对误差 (magnitude of relative error, MRE, 量符号记为 E_{mr}) 能反映参数估计的可信程度, 在这里定义参数的估计误差为^[24]

$$E_{mr} = \frac{|\varphi - \hat{\varphi}|}{\varphi} \times 100\%$$

(29)

式中 φ 为参数的真值, $\hat{\varphi}$ 为参数的估计值。

表 3 4 种方法的参数估计值与真值 ($\beta=2, \eta=2\,000$) 的相对误差对比结果

Table 3 Comparison results of the relative errors between the estimated values of the parameters of the four methods and true values ($\beta=2, \eta=2\,000$)				
方法	$\tilde{\beta}$	$\tilde{\eta}$	$E_{mr,\beta}/\%$	$E_{mr,\eta}/\%$
E-Bayes 法	1.523 1	1 505.1	23.9	24.8
多层 Bayes 法	1.505 4	1 565.3	24.7	21.7
配分布曲线法	1.543 1	2 296.4	22.9	14.8
本文模型	1.827 5	1 824.9	8.6	8.8

根据表3得出的双参数估计值,由式(3)可得到4种方法的可靠度曲线,并与 Monte-Carlo 法的 Weibull 真值曲线比较,得到对比结果如图2所示。

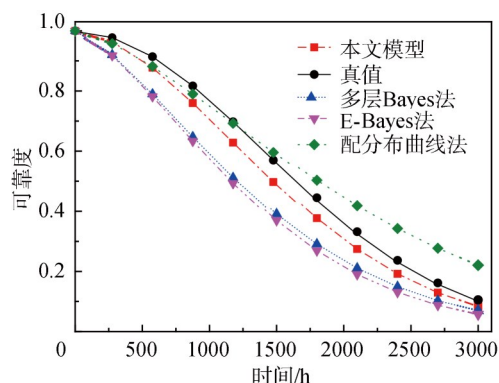


图2 4种方法计算得到的可靠度曲线与真值曲线的对比结果

Fig.2 Comparison results of reliability curves calculated by four methods and true values curves

通过表3和图2对比结果可看出,无论是对于 Weibull 参数的点估计值与真值的相对误差,还是可靠性曲线与真值曲线的整体差异,本文模型

较 E-Bayes 法和多层 Bayes 法都具有明显的优势。体现在本文模型得到的 Weibull 双参数的估计值与真值的相对误差最小,形状参数的相对误差和尺度参数的相对误差均低于 10%,且得到的可靠度曲线与 Weibull 真值曲线更加接近。本文模型与配分布曲线法对比可得,配分布曲线法在 1 200 h 以后可靠度曲线在真值曲线之上,表明其可靠性评估较为“冒进”,会使得评估出的无失效寿命大于产品的实际寿命,在预测产品后续可靠度会偏不安全。本文模型在 0~3 000 h 可靠度曲线在真值曲线之下,说明本文模型可靠性评估也略微“保守”,会使得评估处的无失效寿命略小于产品的实际寿命,但评估的产品寿命会比较安全。

运用 E-Bayes 法、多层 Bayes 法、配分布曲线法和本文模型对表2数据进行可靠性评估得到的点估计值 $R(t)$,可靠度点估计值对比结果如表4所示。根据图2可知,本文模型和配分布曲线法均优于现有 Bayes 法,故由式(28),将本文模型和配分布曲线在 0~3 000 h 的可靠度点估计值分别与真值的相对误差进行对比,对比结果如图3所示。

表4 可靠度点估计值结果对比

Table 4 Comparison results of reliability point estimation

方法	$R(300)$	$R(600)$	$R(900)$	$R(1200)$	$R(1500)$	$R(1800)$	$R(2100)$	$R(2400)$	$R(2700)$	$R(3000)$
本文模型	0.963 8	0.877 2	0.0.7 597	0.628 2	0.497 1	0.377 1	0.274 6	0.192 1	0.129 3	0.083 7
真值	0.977 8	0.913 9	0.816 7	0.697 7	0.569 8	0.444 9	0.332 0	0.236 9	0.161 6	0.105 4
配分布曲线法	0.957 7	0.881 6	0.790 1	0.692 6	0.595 5	0.503 2	0.418 5	0.342 8	0.277 0	0.220 8
E-Bayes 法	0.917 8	0.781 6	0.633 2	0.492 5	0.369 8	0.268 9	0.190 0	0.130 6	0.087 6	0.057 3
多层 Bayes 法	0.920 2	0.789 7	0.647 5	0.511 6	0.391 5	0.291 1	0.210 9	0.149 1	0.103 1	0.069 8

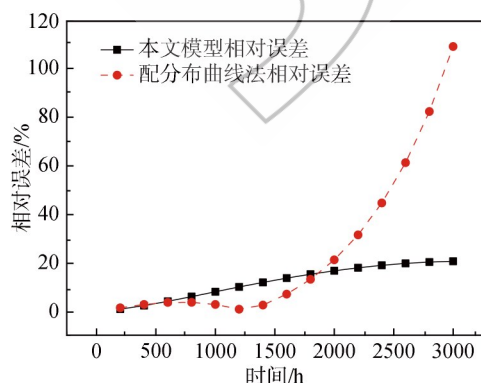


图3 本文模型和配分布曲线法的点估计值相对真值的相对误差

Fig.3 Relative error of the point estimate of the model and distribution curve method to the true value

由图3和表4可以看出在相同超参数 c 下,本文模型较配分布曲线法的点估计值相对真值有更好的评估效果,且随着试验时间的增加,配分布曲线法的点估计值相对误差越来越大,到 3 000 h 时,相对误差已达到 110%。而本文模型的相对误差始终保持在 20% 以下,验证了运用本文模型对小样本无失效数据进行可靠性评估的稳定性和可行性。

2 实例分析

2.1 参数估计

文献[12]给出了某轴承厂生产的 201Z1 滚动轴承进行定时截尾寿命试验数据,其寿命服从于

Weibull分布,对 20 套样品分 6 组进行试验,到截尾时间未发生一套失效,无失效数据如表 5 所示。

表 5 滚动轴承试验得到的无失效数据

Table 5 Zero-failure test data of rolling bearings

分组序号 <i>i</i>	截尾时间 T_i	第 <i>i</i> 组样本数 n_i	未失效数 s_i
1	422	2	20
2	539	4	18
3	602	2	14
4	770	4	12
5	847	4	8
6	924	4	4

文献[12]取超参数 $c=5$,利用 Bayes 法计算出双参数值 $\beta=2.3205$ 、 $\eta=3377$,且已被实际单位采纳,具有一定的工程价值。文献[14]采用配分布曲线法对表 5 数据进行双参数值估计,估计值为 $\beta=1.84$ 、 $\eta=5043$ 。本文分别运用多层 Bayes 法、E-Bayes 法和本文模型对表 5 的无失效数据进行可靠性评估,分别计算出每种方法的双参数 $\tilde{\beta}$ 、 $\tilde{\eta}$,与配分布曲线法进行双参数对比,结果如表 6 所示。根据式(3)做出可靠度曲线图,将 5 种方法得到的可靠度评估曲线图进行对比,结果如图 4 所示。

表 6 5 种方法得出的双参数值

Table 6 Two-parameter values obtained by five methods

方法	$\tilde{\beta}$	$\tilde{\eta}$
E-Bayes 法	1.873 0	2 819.1
多层 Bayes 法	1.910 8	2 940.1
配分布曲线法	1.840	5 043
本文模型	2.276 2	3 325.6

通过表 6 和图 4 对比结果可知,本文模型、配分布曲线法和文献方法在小样本无失效数据评估中均优于传统 Bayes 法。其中本文模型较配分布曲线法在双参数估计中更接近已应用到工程实践的文献[12]计算方法,可靠度曲线也更接近文献[12]方法,总体趋势与文献[12]方法相同。而配分布曲线法在 500 h 后开始逐渐往上偏离,说明在某一时刻,配分布曲线法评估值可能也会出现“冒进”现象。表明采用本文模型进行可靠性评估完全能够满足小样本无失效数据产品的可靠性分析

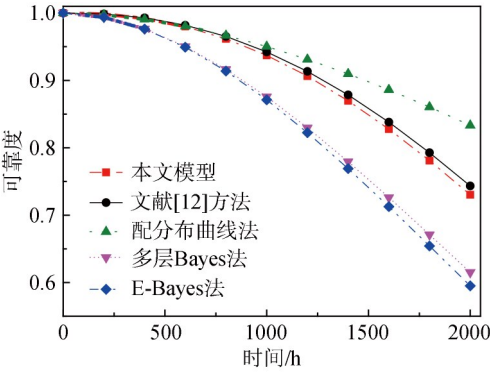


图 4 5 种方法计算得到的可靠度曲线对比结果
Fig.4 Comparison results of reliability curves calculated by five methods

要求,能够应用到工程实践中。

2.2 置信区间估计

置信区间是指由样本统计量所构造的总体参数的估计区间,在可靠性分析理论中,常常会利用可靠度置信区间的平均长度来说明评估方法估计误差的大小。可靠度置信区间长度展现的是评估得到的可靠度点估计值的真实值在一定概率下落在评估结果周围,在相同的置信水平下,可靠度置信区间的平均长度越小,估计的误差也越小,评估结果精度越高;反之则估计的误差大,评估结果精度低。文献[25]给出了产品服从 Weibull 分布条件下的某时刻 t 的可靠性双侧置信区间计算公式,若形状参数 β 已知,则有

1) 平均寿命 θ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left\{\begin{aligned}\hat{\theta}_u &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i t_i^\beta}{-\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)} \\ \hat{\theta}_l &= \frac{\sum_{i=1}^k n_i t_i^\beta}{-\ln\frac{\alpha}{2}}\end{aligned}\right. \quad (30)$$

2) 可靠度 $R(t)$ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left\{\begin{aligned}R_u(t) &= \exp\left[\frac{t^\beta \ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sum_{i=1}^k n_i T_i^\beta}\right] \\ R_l(t) &= \exp\left[\frac{t^\beta \ln\frac{\alpha}{2}}{\sum_{i=1}^k n_i T_i^\beta}\right]\end{aligned}\right. \quad (31)$$

式(30)、式(31)中 α 为置信水平, T_i 为第 i 组样本的截尾时间, n_i 为第 i 组的样本数, $\hat{\theta}_u$ 为尺度参数区间估计的上限, $\hat{\theta}_l$ 为尺度参数区间估计的下限, $R_u(t)$ 为可靠度区间估计的上限, $R_l(t)$ 为可靠度区间估计的下限。

可靠度双侧置信区间的长度用 $\Delta R(t)$ 表示,可靠度双侧置信区间的平均长度用 Δ 表示,则有

$$\Delta R(t) = R_u(t) - R_l(t) \quad (32)$$

$$\Delta = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \Delta R(t) \quad (33)$$

为了保证Beta函数的稳健性,超参数取建议值 $c=5$,运用E-Bayes法、多层Bayes法、配分布曲线法、文献[12]方法和本文模型对表5数据进行可靠性评估,得到的双侧置信区间长度 $\Delta R(t)$ 及双侧置信区间平均长度 Δ 对比结果如表7所示。

表7 双侧置信区间平均长度结果对比

Table 7 Comparison results of average length of two-sided confidence interval

方法	$\Delta R(200)$	$\Delta R(400)$	$\Delta R(600)$	$\Delta R(800)$	$\Delta R(1000)$	Δ
本文模型	0.007 4	0.035 3	0.086 3	0.159 3	0.249 9	0.107 6
文献[12]方法	0.007 0	0.034 3	0.085 3	0.159 4	0.252 2	0.107 6
配分布曲线法	0.013 3	0.046 9	0.096 2	0.157 5	0.227 4	0.108 3
E-Bayes法	0.012 1	0.044 8	0.094 5	0.157 9	0.231 0	0.108 1
多层 Bayes 法	0.012 7	0.045 9	0.095 4	0.157 7	0.229 1	0.108 2

从表7中从分析各时刻点可靠度双侧置信区间平均长度来看,本文模型评估的置信区间平均长度低于传统Bayes法和配分布曲线法置信区间的平均长度,说明了该模型在小样本无失效数据可靠性评估中有更高的评估精度,并且可以把本文模型计算得到的可靠度期望值作为原始样本的可靠度的近似估计,应用到工程实践中。与文献[12]模型相比,本文模型的计算更加简便,更易于工程应用,对于其他服从Weibull分布高质量、长寿命的产品的小样本无失效数据可靠性分析中也同样适用。

3 结 论

1) 针对小样本无失效寿命数据的可靠性分析,提出了一种结合Bayes理论、Bootstrap抽样法、最佳线性不变估计法的计算模型。通过Monte-Carlo模拟法对模型进行了可行性的验证,发现模型得到的参数估计较传统Bayes法更接近真值,对于形状参数 β 和尺度参数 η 与真值的相对误差均低于10%。

2) 借助文献实例对模型进行了论证,对比发现模型在样本量较小的情况下能得到较传统Bayes法和配分布曲线法有更为准确的可靠性评估结果,且模型得到的可靠度双侧置信区间平均长度结果也更小,对于提高小样本无失效条件下的评估精度有一定的积极意义。

3) 提出的小样本无失效数据可靠性评估模型中的思想不仅适用于轴承类产品分析,同时也适用于寿命服从Weibull分布其他类型的高质量、长寿命产品的无失效数据可靠性分析。

参考文献:

- [1] 石长伟,刘志明.小样本评估方法[J].质量与可靠性,2006(6):24-26.
SHI Changwei, LIU Zhiming. Small samples evaluation method[J]. Quality and Reliability, 2006(6): 24-26. (in Chinese)
- [2] MARTZ H F, WALLER R A. A Bayesian zero-failure (BAZE) reliability demonstration tension procedure[J]. Journal of Quality Technology, 1976, 11(3): 128-137.
- [3] ERTO P, GIORGIO M. Modified "practical Bayes-estimators": reliability theory[J]. IEEE Transactions on Reliability, 1996, 45(1): 132-137.
- [4] KWON Y I. Design of Bayesian zero-failure reliability demonstration test for products with Weibull lifetime distribution[J]. Journal of Applied Reliability, 2014, 14(4): 220-224.
- [5] KWON Y I. The effect of scale parameter in designing reliability demonstration test for lognormal lifetime distribution[J]. Journal of Applied Reliability, 2014, 14(1): 53-57.
- [6] 韩明. 状态概率的E-Bayes估计与多层Bayes估计[J]. 运筹与管理, 2006, 15(5): 70-74.
HAN Ming. E-Bayes estimation and hierarchical Bayesian estimation of estate probability[J]. Operations Research and Management, 2006, 15(5): 70-74. (in Chinese)
- [7] 韩明. 失效概率的E-Bayes估计及其性质[J]. 数学物理学报, 2007, 27(3): 488-495.

- HAN Ming. E-Bayes estimation of failure probability and properties[J]. Journal of Mathematical Physics, 2007, 27(3): 488-495. (in Chinese)
- [8] 傅惠民, 张勇波. Weibull 分布定时无失效数据可靠性分析方法[J]. 航空动力学报, 2010, 25(12): 2807-2810.
- FU Huiming, ZHANG Yongbo. Method of reliability analysis for time truncated zero-failure data based on Weibull distribution[J]. Journal of Aerospace Power, 2010, 25(12): 2807-2810. (in Chinese)
- [9] 李海洋, 谢里阳, 刘杰, 等. 无失效数据场合智能换刀机器人中轴承的可靠性评估[J]. 机械工程学报, 2019, 55(2): 186-194.
- LI Haiyang, XIE Liyang, LIU Jie, et al. Reliability evaluation of bearings in the intelligent robot for changing the hob without failure data[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2019, 55(2): 186-194. (in Chinese)
- [10] LI H, XIE L, LI M, et al. Reliability assessment of high-quality and long-life products based on zero-failure data[J]. Quality and Reliability Engineering International, 2019, 35(1): 470-482.
- [11] YIN Y C, HUANG H Z, PENG W, et al. An E-Bayesian method for reliability analysis of exponentially distributed products with zero-failure data[J]. Eksploatacja i Niezawodność: Maintenance and Reliability, 2016, 18(3): 445-449.
- [12] 茆诗松, 夏剑锋, 管文琪. 轴承寿命试验中无失效数据的处理[J]. 应用概率统计, 1993, 9(3): 326-331.
- MAO Shisong, XIA Jianfeng, GUAN Wenqi. The reliability analysis of zero-failure data for bearing life test[J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 1993, 9(3): 326-331. (in Chinese)
- [13] 肖支才, 高华明, 丁通, 等. 自助法在小样本数据均值估计中的应用[J]. 海军航空工程学院学报, 2009, 24(5): 563-567, 572.
- XIAO Zhicai, GAO Minghua, DING Tong, et al. Application of mean estimation of small sample data with Bootstrap method[J]. Journal of Naval Aeronautical Engineering Institute, 2009, 24(5): 563-567, 572. (in Chinese)
- [14] 贾祥, 王小林, 郭波. 极少失效数据和无失效数据的可靠性评估[J]. 机械工程学报, 2016, 52(2): 182-188.
- JIA Xiang, WANG Xiaolin, GUO Bo. Reliability assessment for very few failure data and zero-failure data[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2016, 52(2): 182-188. (in Chinese)
- [15] LI D C, LIN L S. A new approach to assess product lifetime performance for small data sets[J]. European Journal of Operational Research, 2013, 230(2): 290-298.
- [16] 丛伟, 陈晓阳, 王志坚, 等. Weibull 分布产品小样本定时截尾试验方案下的可靠性评估[J]. 中国机械工程, 2013, 24(14): 1891-1896.
- CONG Wei, CHEN Xiaoyang, WANG Zhijian, et al. Reliability evaluation of products with life following Weibull distribution under type I censoring test plan with small sample size[J]. China Mechanical Engineering, 2013, 24(14): 1891-1896. (in Chinese)
- [17] 高攀东, 沈雪瑾, 陈晓阳, 等. 基于自助法的小样本 Weibull 分布可靠性分析[J]. 机械设计与研究, 2015, 31(2): 164-167.
- GAO Pandong, SHEN Xuejin, CHEN Xiaoyang, et al. Reliability evaluation for zero-failure data of rolling bearings based on Bootstrap maximum entropy method[J]. Machine Design and Research, 2015, 31(2): 164-167. (in Chinese)
- [18] 赵宇. 可靠性数据分析[M]. 北京: 国防工业出版社, 2011.
- [19] BERGER J O. Statistical decision theory and Bayesian analysis[M]. New York: Springer-Verlag, 1985.
- [20] 高攀东, 沈雪瑾, 陈晓阳, 等. 无失效数据下航空轴承的可靠性分析[J]. 航空动力学报, 2015, 30(8): 1980-1987.
- GAO Pandong, SHEN Xuejin, CHEN Xiaoyang, et al. Reliability analysis for aircraft bearing with zero-failure data[J]. Journal of Aerospace Power, 2015, 30(8): 1980-1987.
- [21] 中国电子技术标准化研究所. 可靠性试验用表[M]. 北京: 国防工业出版社, 1987.
- [22] 秦萃晟, 陈晓阳, 沈雪瑾. 小样本下基于竞争失效的轴承可靠性评估[J]. 振动与冲击, 2017, 36(23): 248-254.
- QIN Luosheng, CHEN Xiaoyang, SHEN Xuejin. Reliability assessment of bearings based on competing failure under small sample data[J]. Journal of Vibration and Shock, 2017, 36(23): 248-254. (in Chinese)
- [23] 宁江凡, 鄢小清, 张士峰. 液体火箭发动机无失效条件下的可靠性分析方法[J]. 国防科技大学学报, 2006, 28(5): 22-25.
- NING Jiangfan, YAN Xiaoqing, ZHANG Shifeng. Study on reliability analysis method for liquid rocket engine in the case of zero-failure data[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2006, 28(5): 22-25. (in Chinese)
- [24] STENSRUD E, FOSS T, KITCHENHAM B, et al. An empirical validation of the relationship between the magnitude of relative error and project size[C]//Proceedings the 8th IEEE Symposium on Software Metrics. Ottawa, ON, Canada: IEEE, 2002: 3-12.
- [25] JIANG Renbin, JIANG Danyu. Fiducial lower confidence limits of reliability for a standby system based on zero-failure data[J]. Journal of Zhejiang University Science, 2010, 37(6): 629-632.

(编辑: 王碧琚)